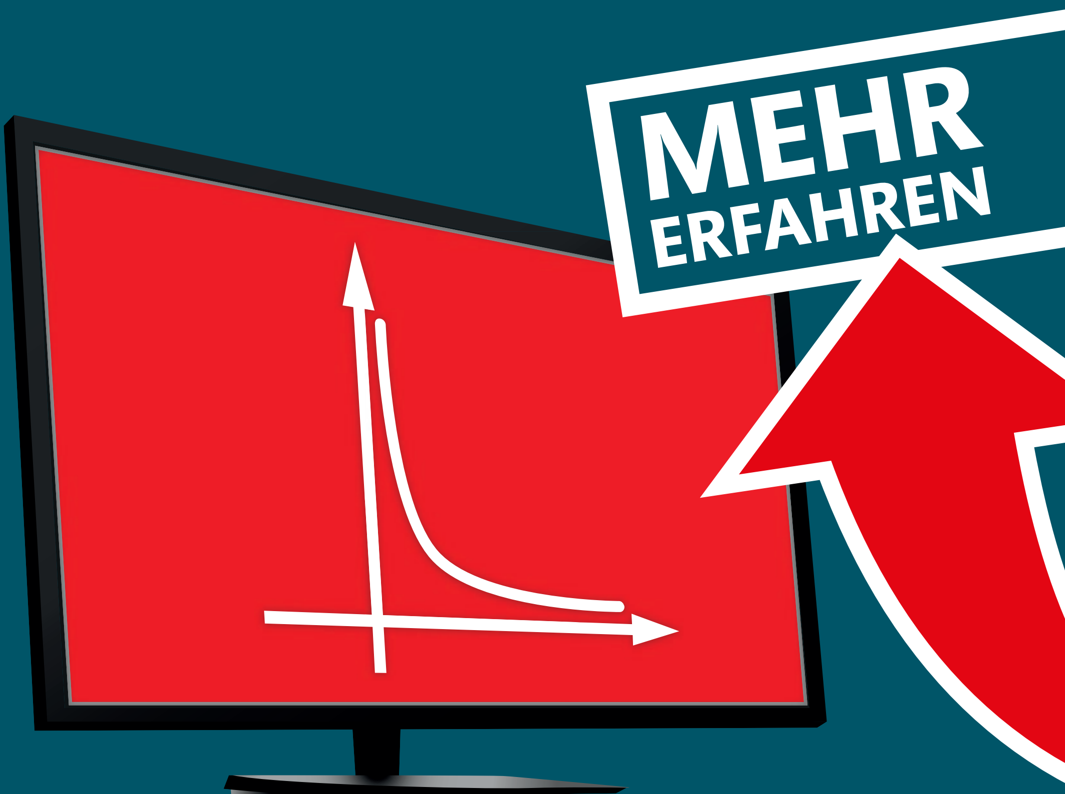
STARK digital

# LESEPROBE

## MATHEMATIK

Allgemeinbildendes Gymnasium




0601 D1

# VERFÜGBARE JAHRGÄNGE

| BUNDESLAND | BESCHREIBUNG | JAHRGANG |
|---|---|---|
| **Baden-Württemberg** | Gymnasium | **ab 2012** |
| **Bayern** | Gymnasium | **ab 2011** |
| **Berlin** | Gymnasium | **ab 2014** |
| **Brandenburg** | Gymnasium | **ab 2011** |
| **Hamburg** | Gymnasium GN/EN | **ab 2012** |
| **Hessen** | Gymnasium / Gesamtschule GK/LK | **ab 2011** |
| **Mecklenburg-Vorpommern** | Gymnasium | **2011 – 2013** |
| **Niedersachsen** | Gymnasium / Gesamtschule GA/EA | **ab 2010** |
| **Nordrhein-Westfalen** | Gymnasium / Gesamtschule GK/LK | **ab 2011** |
| **Rheinland-Pfalz** | Gymnasium | **ab 2017** |
| **Sachsen** | Gymnasium GK/LK | **ab 2011** |
| **Sachsen-Anhalt** | Gymnasium GN/EN | **2007 – 2013** |
| **Schleswig-Holstein** | Gymnasium / Gemeinschaftsschule | **ab 2010** |
| **Thüringen** | Gymnasium | **ab 2012** |

## Aufgabengruppe 1

BE

1. Geben Sie für die Funktionen $f_1$ und $f_2$ jeweils die maximale Definitionsmenge und die Nullstelle an.

   $f_1\colon x \mapsto \dfrac{2x+3}{x^2-4}$ $\qquad$ $f_2\colon x \mapsto \ln(x+2)$ 4

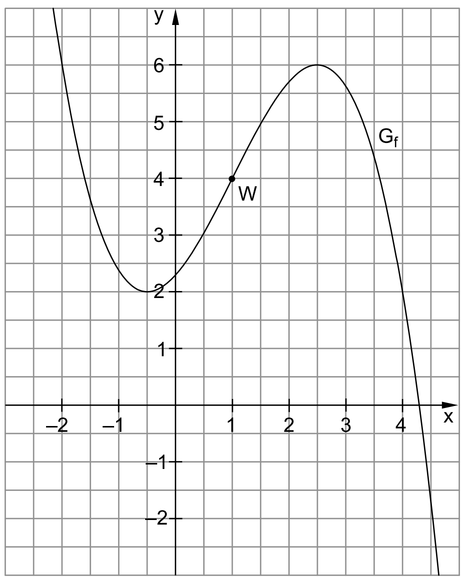
2. Geben Sie den Term einer in $\mathbb{R}$ definierten Funktion an, deren Graph im Punkt $(2\,|\,1)$ eine waagrechte Tangente, aber keinen Extrempunkt hat. 3

3. Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion f mit $f(x) = -x^3 + 9x^2 - 15x - 25$.
   Weisen Sie nach, dass f folgende Eigenschaften besitzt:
   (1) Der Graph von f besitzt an der Stelle $x = 0$ die Steigung $-15$.
   (2) Der Graph von f besitzt im Punkt $A(5\,|\,f(5))$ die x-Achse als Tangente.
   (3) Die Tangente t an den Graphen der Funktion f im Punkt $B(-1\,|\,f(-1))$ kann durch die Gleichung $y = -36x - 36$ beschrieben werden. 5

4. Die Abbildung zeigt den Graphen $G_f$ einer in $\mathbb{R}$ definierten Funktion f mit dem Wendepunkt $W(1\,|\,4)$.

   Ermitteln Sie mithilfe der Abbildung näherungsweise den Wert der Ableitung von f an der Stelle $x = 1$.

   Skizzieren Sie den Graphen der Ableitungsfunktion f' von f in die Abbildung; berücksichtigen Sie dabei insbesondere die Lage der Nullstellen von f' sowie den für f'(1) ermittelten Näherungswert.




3

5. Für jeden Wert von a mit $a \in \mathbb{R}^+$ ist eine Funktion $f_a$ durch $f_a(x) = \frac{1}{a} \cdot x^3 - x$ mit $x \in \mathbb{R}$ gegeben.

a) Eine der beiden Abbildungen stellt einen Graphen von $f_a$ dar. Geben Sie an, für welche Abbildung dies zutrifft. Begründen Sie Ihre Antwort.

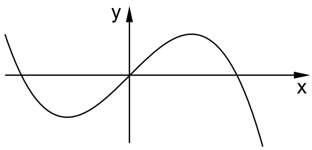


Abb. 1

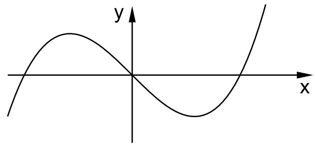


Abb. 2 2

b) Für jeden Wert von a besitzt der Graph von $f_a$ genau zwei Extrempunkte. Ermitteln Sie denjenigen Wert von a, für den der Graph der Funktion $f_a$ an der Stelle $x = 3$ einen Extrempunkt hat. 3

20

## Aufgabengruppe 2

BE

1. Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto \sqrt{3x-5}$ mit maximalem Definitionsbereich D. Geben Sie D an und bestimmen Sie die Gleichung der Tangente an den Graphen von f im Punkt $(3 \mid f(3))$. 6

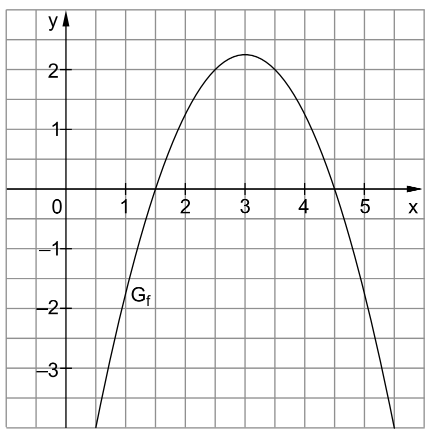
2. Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion f mit $f(x) = -x^3 + 9x^2 - 15x - 25$. Weisen Sie nach, dass f folgende Eigenschaften besitzt:
(1) Der Graph von f besitzt an der Stelle $x = 0$ die Steigung $-15$.
(2) Der Graph von f besitzt im Punkt $A(5 \mid f(5))$ die x-Achse als Tangente.
(3) Die Tangente t an den Graphen der Funktion f im Punkt $B(-1 \mid f(-1))$ kann durch die Gleichung $y = -36x - 36$ beschrieben werden. 5

3. Die Abbildung zeigt eine nach unten geöffnete Parabel, die zu einer Funktion f mit Definitionsbereich $\mathbb{R}$ gehört. Der Scheitel der Parabel hat die x-Koordinate 3.

Betrachtet wird die in $\mathbb{R}$ definierte Integralfunktion

$$F: x \mapsto \int_3^x f(t)\,dt.$$

Wie viele Nullstellen hat F? Machen Sie Ihre Antwort ohne Rechnung plausibel. 4



## Tipps und Hinweise

### Aufgabengruppe 1

**Aufgabe 1**

- Um welche Art Funktion handelt es sich bei $f_1$?
- Was darf bei einem Bruch nie passieren?
- Division durch null ist nicht definiert.
- Für welche x-Werte hat der Nenner den Wert null?
- Ein Bruch hat den Wert null, wenn der Zähler den Wert null hat (und der Nenner nicht).
- Um welche Art Funktion handelt es sich bei $f_2$?
- Das Argument einer ln-Funktion muss positiv sein.
- $\ln x$ besitzt seine einzige Nullstelle für $x = 1$.

**Aufgabe 2**

- Im Punkt $(2 \mid 1)$ befindet sich eine waagrechte Tangente, aber das Monotonieverhalten ändert sich nicht.
- Ein Punkt, der kein Extrempunkt ist, aber eine waagrechte Tangente besitzt, ist ein Terrassenpunkt.
- Ist Ihnen eine Funktion bekannt, die im Ursprung einen Terrassenpunkt besitzt?
- Die Funktion $f(x) = x^3$ besitzt im Ursprung eine waagrechte Tangente, aber keinen Extrempunkt.
- Wie muss der Graph von $f(x) = x^3$ verschoben werden, damit sich der Terrassenpunkt nicht in $(0 \mid 0)$, sondern in $(2 \mid 1)$ befindet?
- Mögliche Verschiebungen sind:
  $f(x) + a$ Verschiebung um a in y-Richtung
  $f(x + a)$ Verschiebung um $-a$ in x-Richtung

**Aufgabe 3 (1)**

- Wie bestimmt man die Steigung einer Funktion für ein gegebenes x?
- Die Steigung der Tangente wird durch die 1. Ableitung angegeben.
- Die Forderung ist erfüllt, wenn $f'(0) = -15$ gilt.

# Lösungen

## Aufgabengruppe 1

1. $f_1(x) = \frac{2x+3}{x^2-4}$

$x^2 - 4 = 0$

$x^2 = 4$

$x = \pm 2$

$\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{\pm 2\}$

$2x + 3 = 0$

$x = -\frac{3}{2} = -1{,}5$

Nullstelle: $x = -1{,}5$

$f_2(x) = \ln(x+2)$

$x + 2 > 0$

$x > -2$

$\mathbb{D} = ]-2; +\infty[$

$x + 2 = 1$

$x = -1$

Nullstelle: $x = -1$

2. Die Funktion $f(x) = x^3$ ist in $\mathbb{R}$ definiert und besitzt in $(0|0)$ eine waagrechte Tangente, aber keinen Extrempunkt (also einen Terrassenpunkt).
Verschiebt man den Graphen $G_f$ um 2 in positive x-Richtung und um 1 in positive y-Richtung, so verschiebt sich $(0|0)$ nach $(2|1)$.

Verschiebung um 2 in positive x-Richtung: Aus $f(x) = x^3$ entsteht $g(x) = (x-2)^3$.
Verschiebung um 1 in positive y-Richtung: Aus $g(x) = (x-2)^3$ entsteht $h(x) = (x-2)^3 + 1$.

Die Funktion $h(x) = (x-2)^3 + 1$ besitzt in $(2|1)$ eine waagrechte Tangente, aber keinen Extrempunkt.

3. $f(x) = -x^3 + 9x^2 - 15x - 25$

$f'(x) = -3x^2 + 18x - 15$

(1) $f'(0) = -3 \cdot 0^2 + 18 \cdot 0 - 15 = -15$ **erfüllt**

(2) $f(5) = -5^3 + 9 \cdot 5^2 - 15 \cdot 5 - 25 = 0$

$f'(5) = -3 \cdot 5^2 + 18 \cdot 5 - 15 = 0$

Da A auf der x-Achse liegt und die Tangente in A waagrecht verläuft, besitzt der Graph von f in A die x-Achse als Tangente. **erfüllt**

(3) $f(-1) = -(-1)^3 + 9 \cdot (-1)^2 - 15 \cdot (-1) - 25 = 0$

$f'(-1) = -3 \cdot (-1)^2 + 18 \cdot (-1) - 15 = -36$

Tangente: $y = mx + t$ mit $m = f'(-1) = -36$ durch $B(-1|f(-1)) = B(-1|0)$

$0 = -36 \cdot (-1) + t$

$t = -36$

$y = -36x - 36$ **erfüllt**