

2021

Abitur

Original-Prüfung
mit Lösungen

**MEHR
ERFAHREN**

Berlin

Mathematik LK

+ Übungsaufgaben
+ Online-Glossar

ActiveBook
• Interaktives
Training



STARK

Inhalt

Vorwort
Stichwortverzeichnis

Hinweise und Tipps zum Zentralabitur 2021

Die zentrale schriftliche Abiturprüfung im Fach Mathematik	I
Prüfungsrelevante Themen	I
Aufbau und Bearbeitung der Prüfungsaufgaben	I
Zur Bewertung der Prüfung	III
Zum Umgang mit diesem Buch	III
Tipps zur Vorbereitung und Bearbeitung der Prüfungsaufgaben	IV
Hinweise und Tipps zum Lösen von Abituraufgaben mit CAS-Rechnern	IV
Weiterführende Informationen	VI

Übungsaufgaben zum hilfsmittelfreien Teil

Übungsaufgabe 1	1
Übungsaufgabe 2	11
Übungsaufgabe 3	18
Übungsaufgabe 4	24

Zentrale schriftliche Abiturprüfung

Jahrgang 2016

Aufgabe 1.1: Analysis: $f_a(x) = 2a\sqrt{x} - x$	2016-1
Aufgabe 1.2: Analysis: $f_a(x) = -e^{x-a} + e^{2x}$	2016-7
Aufgabe 1.2: Analysis (CAS): $f_a(x) = -e^{x-a} + e^{2x}$	2016-14
Aufgabe 2.1: Analytische Geometrie	2016-21
Aufgabe 2.2: Analytische Geometrie	2016-27
Aufgabe 3.1: Stochastik	2016-33
Aufgabe 3.2: Stochastik	2016-37

Jahrgang 2017

Aufgabe 1.1: Analysis: $f(x) = k \cdot \sqrt{a-x^2}$	2017-1
Aufgabe 1.2: Analysis: $f_a(x) = e^{2ax} + e^{-2ax}$	2017-9
Aufgabe 1.2: Analysis (CAS): $f_a(x) = e^{2ax} + e^{-2ax}$	2017-16
Aufgabe 2.1: Analytische Geometrie	2017-24
Aufgabe 2.2: Analytische Geometrie	2017-30
Aufgabe 3.1: Stochastik	2017-38
Aufgabe 3.2: Stochastik	2017-44

Jahrgang 2018

Aufgabe 1.1: Analysis: $f_a(x) = (x^2 + a) \cdot e^{0,5-x}$	2018-1
Aufgabe 1.2: Analysis: $f_a(x) = \frac{1}{a}x^3 + 3x^2 + 5x + 2a$ und $h(x) = -\frac{1}{2} \cdot x^{-3}$. . .	2018-10
Aufgabe 2.1: Analytische Geometrie	2018-20
Aufgabe 2.2: Analytische Geometrie	2018-26
Aufgabe 3.1: Stochastik	2018-31
Aufgabe 3.2: Stochastik	2018-36

Jahrgang 2019

Aufgabe 1: hilfsmittelfreier Teil	2019-1
Aufgabe 2.1: Analysis: $f_a(x) = \frac{x}{a} \cdot \ln\left(\frac{x}{a}\right)$; $h(x) = \frac{1}{10}e^{x-1} + 2$	2019-10
Aufgabe 2.2: Analysis: $f_k(x) = 8k \cdot (kx - 1)^2 \cdot (kx + 1)^2$; $g(x) = (x - 2)^2 \cdot e^x$. .	2019-19
Aufgabe 3.1: Analytische Geometrie	2019-28
Aufgabe 3.2: Analytische Geometrie	2019-36
Aufgabe 4.1: Stochastik	2019-43
Aufgabe 4.2: Stochastik	2019-49

Jahrgang 2020 www.stark-verlag.de/mystark

Das Corona-Virus hat im vergangenen Schuljahr auch die Prüfungsabläufe durcheinandergebracht und manches verzögert. Daher sind die Aufgaben und Lösungen zur Prüfung 2020 in diesem Jahr nicht im Buch abgedruckt, sondern erscheinen in digitaler Form. Sobald die Original-Prüfungsaufgaben 2020 zur Veröffentlichung freigegeben sind, können Sie sie als PDF auf der Plattform MyStark herunterladen.



Sitzen alle mathematischen Begriffe? Unter www.stark-verlag.de/mathematik-glossar/ finden Sie ein kostenloses Glossar zum schnellen Nachschlagen aller wichtigen Definitionen mitsamt hilfreicher Abbildungen und Erläuterungen.



Ihr Coach zum Erfolg: Mit dem **interaktiven Training zum hilfsmittelfreien Teil des Abiturs** lösen Sie online auf MyStark Aufgaben, die speziell auf diesen Prüfungsteil zugeschnitten sind. Am besten gleich ausprobieren! Ausführliche Infos inkl. Zugangscode finden Sie auf den Farbseiten vorne in diesem Buch.

Jeweils zu Beginn des neuen Schuljahres erscheinen die neuen Ausgaben der Abiturprüfungsaufgaben mit Lösungen.

Autoren:

Sabine Flohrer:

Lösungen zur Abiturprüfung Berlin 2016, Aufgaben 1.1, 2.1, 2.2, 3.1 und 3.2;
Lösungen zur Abiturprüfung Berlin 2017, Aufgaben 1.1, 2.1, 2.2, 3.1 und 3.2

Dr. Detlef Launert:

Lösungen zur Abiturprüfung Berlin 2016, Aufgaben 1.2 und 1.2 (CAS)
Lösungen zur Abiturprüfung Berlin 2017, Aufgaben 1.2 und 1.2 (CAS)
Lösungen zur Abiturprüfung Berlin 2018, Aufgaben 1.1 und 1.2
Lösungen zur Abiturprüfung Berlin 2019, Aufgabe 1 Analysis, Aufgaben 2.1 und 2.2
Lösungen zur Abiturprüfung Berlin 2020, Aufgabe 1 Analysis, Aufgaben 2.1 und 2.2
Übungsaufgaben zum hilfsmittelfreien Teil

Lauri Lehmann:

Lösungen zur Abiturprüfung Berlin 2018, Aufgaben 2.1, 2.2, 3.1 und 3.2
Lösungen zur Abiturprüfung Berlin 2019, Aufgabe 1 Geometrie und Stochastik,
Aufgaben 3.1, 3.2, 4.1 und 4.2
Lösungen zur Abiturprüfung Berlin 2020, Aufgabe 1 Geometrie und Stochastik,
Aufgaben 3.1, 3.2, 4.1 und 4.2

Vorwort

Liebe Schülerinnen und Schüler,

dieses Übungsbuch ist die ideale Hilfe bei der Vorbereitung auf das **Zentralabitur 2021** für den **Leistungskurs in Berlin** im Fach **Mathematik**.

- Sie erhalten im ersten Teil des Buches wichtige **Informationen** über Inhalt und Aufbau der Prüfungsaufgaben für das **Abitur 2021**. Dies ermöglicht Ihnen, sich gezielt auf die Abiturprüfung vorzubereiten. Darüber hinaus finden Sie viele **Hinweise und Tipps**, die Ihnen helfen, effektiv und erfolgreich an die Lösung der Prüfungsaufgaben heranzugehen.
- Im zweiten Teil stehen Ihnen **Übungsaufgaben** zum **hilfsmittelfreien Teil** zur Verfügung. Diese bestehen aus den entsprechenden Aufgaben des Abiturs in Brandenburg und dienen zur Orientierung für den hilfsmittelfreien Teil des Abiturs in Berlin.
- Der dritte Teil enthält die **Original-Prüfungsaufgaben 2016 bis 2019** von Berlin. Die **Original-Prüfung 2020** steht Ihnen auf der **Plattform MyStark** zum Download zur Verfügung. Mit diesen Aufgaben können Sie sich ein genaues Bild davon machen, wie die Prüfung in den letzten Jahren ausgesehen hat.
- Der Zugangscode auf den Farbseiten vorne in diesem Buch ermöglicht es Ihnen, Aufgaben im Rahmen eines **Online-Prüfungstrainings zum hilfsmittelfreien Teil des Abiturs** interaktiv zu lösen.
- Die Original-Prüfungsaufgaben sind zusätzlich mit **separaten Tipps zum Lösungsansatz** versehen, die Ihnen Hilfestellungen für die Lösung der Aufgabe geben. Wenn Sie mit einer Aufgabe nicht zurechtkommen, schauen Sie deshalb nicht gleich in die Lösungen, sondern nutzen Sie schrittweise die Lösungstipps, um selbst die Lösung zu finden.
- Zu allen Original-Prüfungsaufgaben wurde **eine vollständige, ausführlich kommentierte Lösung mit allen erforderlichen Rechenschritten** erstellt, die es Ihnen ermöglicht, Ihre Lösung eigenständig zu kontrollieren und die Rechenwege Schritt für Schritt nachzuvollziehen.

Sollten nach Erscheinen dieses Bandes noch wichtige Änderungen in der Abitur-Prüfung 2021 vom LISUM Berlin-Brandenburg bekannt gegeben werden, finden Sie aktuelle Informationen dazu ebenfalls auf der Plattform MyStark (Zugangscode vgl. Farbseiten).

Die Autoren wünschen Ihnen für die Prüfungsvorbereitung und für das Abitur viel Erfolg!

Hinweise und Tipps zum Zentralabitur 2021

Die zentrale schriftliche Abiturprüfung im Fach Mathematik

Die Grundlagen für die von Ihnen zu bearbeitenden Prüfungsaufgaben sind der Rahmenlehrplan für die gymnasiale Oberstufe in der Ausgabe von 2014 und die Bildungsstandards der KMK für die allgemeine Hochschulreife im Fach Mathematik (Beschluss vom 18.10.2012). Die zu überprüfenden Kompetenzen sowie die inhaltsbezogenen Prüfungsgegenstände ergeben sich aus den im oben genannten Rahmenlehrplan beschriebenen bzw. aufgelisteten abschlussorientierten Standards.

Prüfungsrelevante Themen

Die Prüfungsaufgaben im Fach Mathematik basieren auf dem **Kerncurriculum**. Grundsätzlich **nicht** gefordert werden das Erläutern und Entwickeln von Beweisen sowie Simulationen.

Aufbau und Bearbeitung der Prüfungsaufgaben

Bei der Aufgabenstellung 1, den hilfsmittelfreien Aufgaben, stehen die Aufgaben und ihre Teilaufgaben in keinem übergeordneten Zusammenhang. Sie beziehen sich auf alle drei Themengebiete und können auch in begrenztem Umfang Problemstellungen enthalten, die dem Anforderungsbereich III zuzuordnen sind. Es gibt 6 Aufgaben zu je 5 BE.

Bei den weiteren Aufgabenstellungen ist jede Aufgabe als strukturierte, inhaltlich zusammenhängende Aufgabe konstruiert, die in mehrere Teilaufgaben untergliedert ist. Jede dieser Aufgaben enthält entsprechende Anteile aus allen drei Anforderungsbereichen. Üblicherweise beginnen die Aufgaben mit den dem Anforderungsbereich I zugeordneten Grundaufgaben. Es empfiehlt sich immer, die Aufgabe zunächst vollständig zu lesen, da Zwischenergebnisse gelegentlich auch in nachfolgenden Aufgabenteilen enthalten sein können.

Aufgabenteile, die dem Anforderungsbereich III zugeordnet sind, finden sich meist am Ende der jeweiligen Aufgabe. Nur, wenn es der Zusammenhang erfordert, können sie auch schon früher eingegliedert sein. Wenn sich die Möglichkeit bietet, wird die Aufgabe so formuliert, dass eine praktische Anwendung des mathematischen Sachverhaltes beschrieben wird.

In jedem der drei Themengebiete Analysis, Analytische Geometrie und Stochastik ist genau eine Aufgabe zu lösen, wobei der Prüfling jeweils die Wahl zwischen zwei gleichwertigen Aufgaben hat. Die Wahlmöglichkeiten sind in folgender Tabelle dargestellt:

Aufgabenstellung 1 ohne Wahlmöglichkeit 75 min	Aufgabe 1: hilfsmittelfreier Teil (Analysis, Analytische Geometrie und Stochastik)
Aufgabenstellung 2 Der Prüfling wählt aus.	Aufgabe 2.1 oder Aufgabe 2.2 Analysis
Aufgabenstellung 3 Der Prüfling wählt aus.	Aufgabe 3.1 oder Aufgabe 3.2 Analytische Geometrie
Aufgabenstellung 4 Der Prüfling wählt aus.	Aufgabe 4.1 oder Aufgabe 4.2 Stochastik

Für die Bearbeitung der vier Prüfungsaufgaben stehen **300 Minuten** zur Verfügung.

Davon entfallen 75 Minuten auf die Aufgabenstellung 1.

30 Minuten sind zudem als Lesezeit vorgesehen, in denen die Aufgaben gelesen werden können und eine Wahl zwischen den beiden Aufgaben in jedem Themengebiet getroffen werden kann.

Für die Frage, welche **Hilfsmittel** bei der Prüfung zugelassen sind, ist entscheidend, ob die Abiturprüfung ohne oder mit Verwendung eines Computer-Algebra-Systems (CAS) bearbeitet wird.

Grundsätzlich sind folgende Hilfsmittel zugelassen:

- Nachschlagewerk zur Rechtschreibung der deutschen Sprache
- Formelsammlung, die von der zuständigen Senatsverwaltung bzw. dem zuständigen Ministerium für die Verwendung im Abitur zugelassen und an der Schule eingeführt ist (Aufgabenstellung 2, 3 und 4).

Für die Bearbeitung **ohne CAS** sind folgende Hilfsmittel zugelassen:

Taschenrechner, die nicht programmierbar und nicht grafikfähig sind und nicht über Möglichkeiten der numerischen Differenziation oder Integration oder dem automatisierten Lösen von Gleichungen verfügen.

Für die Bearbeitung **mit CAS** sind folgende Hilfsmittel zugelassen:

Für die Bearbeitung der Abiturprüfung können ein PC oder folgende Geräte Anwendung finden:

Texas Instruments	TI-92, TI-Voyage, TI-Nspire
Casio	Classpad

Ein PC-gestütztes CAS-Abitur kann mit CAS-Software wie MuPad, Geogebra oder Derive oder mit Emulationen von o.g. CAS-Geräten durchgeführt werden.

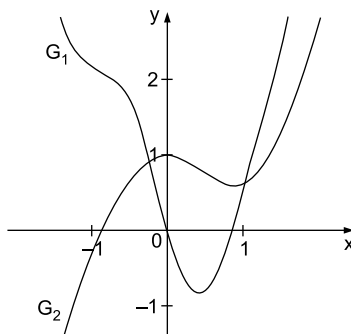
Grundsätzlich gilt, dass die Benutzung weiterer Software über das CAS hinaus nicht zugelassen ist.

Berlin – Mathematik Leistungskurs
Übungsaufgabe 1: hilfsmittelfreier Teil*

Teil 1 – Analysis

BE

- a) Im Bild sind die Graphen G_1 und G_2 dargestellt. Einer der beiden ist der Graph einer Funktion f , der andere der Graph der zugehörigen Ableitungsfunktion f' . Geben Sie an, welcher der beiden Graphen die Ableitungsfunktion zeigt, und begründen Sie Ihre Entscheidung.



- b) Ermitteln Sie diejenige Stammfunktion der Funktion f mit $f(x) = -2e^{2x} + 1$, deren Graph die y -Achse im Punkt $S_y(0|5)$ schneidet.

- c) Aus einem 20 Meter langen Draht soll das Kantenmodell eines Quaders mit quadratischer Grundfläche hergestellt werden. Die Seitenlänge der Quadrate ist a . Stellen Sie eine Funktion in Abhängigkeit von a auf, mit der man das Volumen des Quaders ermitteln kann. Geben Sie den Definitionsbereich für diese Funktion an.

Teil 2 – Analytische Geometrie und Lineare Algebra

- a) Gegeben sind die Punkte $P(1|-2|1)$, $Q(2|-3|-1)$ und $R(-1|4|2)$. Geben Sie eine Gleichung der Geraden g an, die durch den Punkt R und parallel zur Geraden durch die Punkte P und Q verläuft.

- b) Ermitteln Sie zwei Vektoren \vec{b} und \vec{c} , sodass gilt:

Je zwei der drei Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$, \vec{b} und \vec{c} sind orthogonal zueinander.

- c) E_m ist die mittelparallele Ebene, die alle Punkte enthält, die zu den beiden Ebenen $E_1: 2x + 3y - 4z = d_1$ und $E_2: 2x + 3y - 4z = d_2$ den gleichen Abstand haben.

Weisen Sie nach, dass E_m die Gleichung $2x + 3y - 4z = \frac{d_1 + d_2}{2}$ mit $d_1, d_2 \neq 0$ hat.

Teil 3 – Stochastik

- a) Bei einem Multiple-Choice-Test sollen 4 Fragen durch Ankreuzen beantwortet werden. Es gibt stets 4 Antwortmöglichkeiten, von denen genau eine richtig ist. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass jemand durch willkürliches Raten alle Antworten richtig angekreuzt hat.

*Abitur Brandenburg 2015 Aufgabe 1

Tipps und Hinweise zur Lösung von Übungsaufgabe 1

Tipps zu Teil 1

- ✦ a) Suchen Sie die Stellen, an denen der eine Graph eine Nullstelle und der andere eine Extremstelle hat. Was können Sie daraus schließen?
- ✦ b) Berechnen Sie die Stammfunktion von $f(x)$ in Abhängigkeit der Konstanten C .
 - ✦ Setzen Sie die Koordinaten von S_y in die Stammfunktion ein und lösen Sie die entstehende Gleichung nach C auf.
- ✦ c) Stellen Sie das Volumen des Quaders mithilfe der Kantenlänge a und der Kantenlänge b dar.
 - ✦ Die Summe aller Kanten soll 20 m betragen. Wie können Sie daraus die Kantenlänge b in Abhängigkeit von der Kantenlänge a ausdrücken?
 - ✦ Ersetzen Sie b in der Formel für das Volumen.
 - ✦ Welche Bedingung müssen die beiden Kantenlängen erfüllen? Berechnen Sie damit den Definitionsbereich von a .

Tipps zu Teil 2

- ✦ a) Parallele Geraden besitzen denselben Richtungsvektor. Dieser lässt sich mithilfe der beiden Punkte berechnen, durch die die Gerade verläuft.
- ✦ b) Wählen Sie für \vec{b} einen beliebigen Vektor, für den $\vec{a} \circ \vec{b} = 0$ gilt.
 - ✦ Der Vektor \vec{c} muss zwei Bedingungen erfüllen: $\vec{a} \circ \vec{c} = 0$ und $\vec{b} \circ \vec{c} = 0$
- ✦ c) Wählen Sie je einen Punkt, der in der Ebene E_1 bzw. E_2 liegt.
 - ✦ Berechnen Sie die Koordinaten des Mittelpunktes der beiden Punkte.
 - ✦ Verwenden Sie die Koordinaten des Mittelpunktes, um die Ebenengleichung der mittelparallelen Ebene zu bestimmen.

Tipps zu Teil 3

- ✦ a) Verdeutlichen Sie sich den Sachverhalt anhand eines Baumdiagramms.
 - ✦ Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, eine Frage durch Raten richtig zu beantworten?
- ✦ b) Die erste Wahrscheinlichkeit können Sie direkt aus der ergänzten Vierfeldertafel entnehmen.
 - ✦ Für die zweite Wahrscheinlichkeit benötigen Sie die Formel für die bedingte Wahrscheinlichkeit.
- ✦ c) Betrachten Sie die Wahrscheinlichkeit für $X = 3$.
 - ✦ Beachten Sie, dass die Wahrscheinlichkeit für eine gerade Zahl genauso hoch ist wie die Wahrscheinlichkeit für eine ungerade Zahl. Welche Anzahl kommt daher infrage, um dieselbe Wahrscheinlichkeit w zu erhalten?
 - ✦ Prüfen Sie, ob $\binom{20}{17}$ genauso groß ist wie $\binom{20}{3}$. Benutzen Sie dafür $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Lösungen zur Übungsaufgabe 1

Teil 1 – Analysis

a) 1. Möglichkeit:

Der Graph G_2 ist der Graph der Funktion $f(x)$ und der Graph G_1 ist der Graph der Funktion $f'(x)$, weil die Nullstellen von $f'(x)$ die Extremstellen von $f(x)$ sind.

2. Möglichkeit:

Der Graph G_2 ist der Graph der Funktion $f(x)$ und der Graph G_1 ist der Graph der Funktion $f'(x)$, weil die Extremstelle von $f'(x)$ die Wendestelle von $f(x)$ ist.

▣ b) Es handelt sich hier um ein sogenanntes „Anfangswertproblem“.

Für die Stammfunktion von $f(x)$ gilt:

$$F_C(x) = \int (-2e^{2x} + 1) dx = -2 \cdot \frac{1}{2} \cdot e^{2x} + x + C = -e^{2x} + x + C$$

▣ Da $S_y(0|5)$ auf dem Graphen von $F_C(x)$ liegen soll, muss dessen Funktionsterm für $x=0$ und $y=F_C(0)=5$ erfüllt sein. Aus dieser Gleichung lässt sich C berechnen.

Damit gilt:

$$5 = -e^{2 \cdot 0} + 0 + C$$

$$5 = -1 + C$$

$$6 = C$$

Für die Stammfunktion folgt:

$$F(x) = \underline{\underline{-e^{2x} + x + 6}}$$

▣ c) Hier handelt es sich im Ansatz um eine Extremwertaufgabe.

Volumen des Quaders (Hauptbedingung):

$$V = a \cdot a \cdot b = a^2 b$$

Summe aller Kantenlängen des Quaders (Nebenbedingung):

$$8a + 4b = 20$$

$$4b = 20 - 8a$$

$$b = 5 - 2a$$

Damit erhält man als Zielfunktion:

$$V(a) = a^2 b = \underline{\underline{a^2(5 - 2a) = -2a^3 + 5a^2}}$$

Definitionsbereich von $V(a)$:

Damit ein Quader existiert, müssen alle Kantenlängen größer als null sein. Daher muss $a > 0$ gelten. Für b muss die folgende Ungleichung erfüllt sein:

$$5 - 2a > 0$$

$$5 > 2a$$

$$2a < 5$$

$$a < \frac{5}{2}$$

Daher muss a Folgendes erfüllen:

$$0 < a < \frac{5}{2}$$

Damit ergibt sich der Definitionsbereich:

$$\underline{\underline{D_V = \left\{ a \mid a \in \mathbb{R}, 0 < a < \frac{5}{2} \right\}}}$$

Teil 2 – Analytische Geometrie und Lineare Algebra

a) Die Gerade g verläuft durch den Punkt R und ist parallel zur Geraden $g(PQ)$. Es müssen also die folgenden Bedingungen erfüllt sein: $R \in g$ und $g \parallel g(PQ)$.

$$g: \bar{x} = \overline{OR} + t \cdot \overline{PQ} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}; \quad t \in \mathbb{R}$$

▣ b) Zwei Vektoren sind orthogonal zueinander, wenn ihr Skalarprodukt null ergibt.

Die Koordinaten von \bar{b} werden so gewählt, dass $\bar{a} \circ \bar{b} = 0$ erfüllt ist. Dies gilt z. B. für

$$\underline{\underline{\bar{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}}};$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = -6 + 6 + 0 = 0$$

▣ Um einen solchen Vektor zu erhalten, können zwei Koordinaten von \bar{b} frei gewählt werden. Die dritte Koordinate von \bar{b} lässt sich dann über das Skalarprodukt $\bar{a} \circ \bar{b}$ berechnen.

Weiterhin muss gelten:

$$\bar{a} \circ \bar{c} = 0 \text{ und } \bar{b} \circ \bar{c} = 0$$

1. Möglichkeit:

Im trivialen Fall ist $\bar{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \bar{0}$, denn dieser ist zu jedem Vektor orthogonal.

▣ Probe: $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 + 0 + 0 = 0$

$$\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 + 0 + 0 = 0$$

2. Möglichkeit:

Aus den Bedingungen für \bar{c} erhält man ein lineares Gleichungssystem:

$$\bar{a} \circ \bar{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{I} \quad 2x + 3y - z = 0$$

$$\bar{b} \circ \bar{c} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{II} \quad -3x + 2y = 0$$

Biathlon

BE

Biathlon ist eine Sportart, die sich aus den Disziplinen Skilanglauf und Schießen zusammensetzt.

Während eines Einzelrennens kommen alle Biathleten mehrmals an Schießstände.

Dort versuchen sie, mit fünf Schüssen die fünf schwarzen Zielscheiben zu treffen.



- a) Eine Biathletin hat unabhängig von allen äußeren Umständen eine konstante Trefferwahrscheinlichkeit von 90 %.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für die folgenden Ereignisse.
A: Sie trifft an einem Schießstand alle fünf Scheiben.
B: Im gesamten Einzelrennen mit 20 Schüssen hat sie höchstens einen Fehlschuss. 4
- b) Ein Biathlet hat am Schießstand beim ersten Schuss eine Trefferwahrscheinlichkeit von nur 75 %, bei den anderen vier Schüssen von jeweils 90 %.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für die folgenden Ereignisse:
F₁: Er hat einen Fehlschuss beim ersten Schuss, alle anderen Schüsse treffen.
F₂: Er hat genau einen Fehlschuss beim 2. bis 5. Schuss, alle anderen Schüsse treffen.
F₃: Der Biathlet hat bei seinen fünf Schüssen genau einen Fehlschuss. 6
- c) Nach einer Wettkampfsaison wurde die Treffergenauigkeit der gesamten deutschen Biathlon-Mannschaft ausgewertet. Insgesamt gingen 5 096 Schüsse in die Auswertung ein. Dabei ergab sich, dass 811 Fehlschüsse abgegeben wurden und dass bei den Damen von 2 533 Schüssen 2 119 das Ziel trafen.
Von den betrachteten Biathleten wird eine Person zufällig ausgewählt. Untersucht werden die folgenden Ereignisse:
D: Die Person ist eine Frau.
T: Die Person trifft das Ziel.
Erstellen Sie eine Vierfeldertafel zu diesem Sachverhalt.
Prüfen Sie, ob $P_D(T) = P_{\bar{D}}(T)$ gilt.
Interpretieren Sie das Ergebnis im Sachzusammenhang. 6

Bei einem Staffelfrennen, bei dem jeweils vier Biathleten einer Mannschaft nacheinander den Rundkurs absolvieren, gelten abweichende Regeln am Schießstand. Wenn nicht alle fünf Scheiben getroffen wurden, darf jetzt bis zu dreimal nachgeladen und erneut geschossen werden. Es können also maximal acht Schüsse abgegeben werden.

Es wird im Folgenden wieder von einer konstanten Trefferwahrscheinlichkeit von $p=0,9$ ausgegangen.

Tipps und Hinweise zur Lösung von Aufgabe 4.2

Tipp zu Teilaufgabe a

- Die Anzahl der Möglichkeiten, aus einer Gruppe von n Personen k Personen auszuwählen, gibt der Binomialkoeffizient $\binom{n}{k}$ an.

Tipps zu Teilaufgabe b

- Die Angabe, dass zwei Drittel der Fahrgäste aus Deutschland kommen, liefert die Information, dass von den insgesamt 60 Fahrgästen 40 aus Deutschland kommen.
- Zur Aufstellung eines Terms für die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die drei ausgewählten Fahrgäste aus Deutschland kommen, kann Ihnen folgende Überlegung helfen: Für die Auswahl der ersten Person der Dreiergruppe stehen 40 Fahrgäste aus Deutschland von insgesamt 60 Fahrgästen zur Verfügung. Für die Auswahl der zweiten Person der Dreiergruppe stehen nur noch 39 Fahrgäste aus Deutschland von insgesamt 59 Fahrgästen zur Verfügung. Für die Auswahl der dritten Person der Dreiergruppe stehen schließlich nur noch 38 Fahrgäste aus Deutschland von insgesamt 58 Fahrgästen zur Verfügung.

Tipps zu Teilaufgabe c

- Die Angabe, dass die Hälfte der Fahrgäste ein Eis isst, liefert die Information, dass von den 60 Fahrgästen 30 ein Eis essen.
- Führen Sie eine Variable ein, die die Anzahl der an der Fahrt teilnehmenden Kinder bezeichnet.
- Stellen Sie einen Term für die Anzahl der Eis essenden Fahrgäste in Abhängigkeit der von Ihnen eingeführten Variablen für die Anzahl der an der Fahrt teilnehmenden Kinder auf.
- Dabei ergibt sich die Anzahl der Eis essenden Fahrgäste aus der Summe der Eis essenden Kinder und der Eis essenden Erwachsenen.
- Setzen Sie den Term für die Anzahl der Eis essenden Fahrgäste gleich 30 und berechnen Sie den Wert der Variablen für die Anzahl der an der Fahrt teilnehmenden Kinder.

Tipp zu Teilaufgabe d

- Bedenken Sie, dass in der Realität oftmals mehrere Personen zusammen (z. B. befreundete Personen, Familien) eine Reservierung vornehmen.

Tipps zu Teilaufgabe e

- Die Zufallsgröße X : „Anzahl der Personen mit Reservierung, die nicht zur Fahrt erscheinen“ ist binomialverteilt mit $p=0,1$ und $n=62$. Zur Berechnung der gesuchten Wahrscheinlichkeit muss die Bernoulli-Formel angewendet werden.
- Mindestens eine Person mit Reservierung muss abgewiesen werden, wenn entweder keine der Personen mit Reservierung oder nur eine Person mit Reservierung der Fahrt fernbleibt. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mindestens eine Person abgewiesen werden muss, entspricht $P(X \leq 1)$.

Lösungen zu Aufgabe 4.2

- a) Die Anzahl der Möglichkeiten, aus einer Gruppe von 60 Personen drei auszuwählen, gibt der Binomialkoeffizient $\binom{60}{3} = 34\,220$ an.

Es gibt also 34 220 mögliche Dreiergruppen, die sich bei der Auswahl ergeben können.

- b) Anzahl der Fahrgäste, die aus Deutschland kommen:

$$\frac{2}{3} \cdot 60 = 40$$

Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die drei ausgewählten Fahrgäste aus Deutschland kommen, berechnet sich über den Quotienten Anzahl der Fahrgäste zur Gesamtanzahl der Fahrgäste. Da es sich um ein Ziehen ohne Zurücklegen handelt, verringern sich die Anzahlen für die 2. und 3. Person immer jeweils um eins.

$$\frac{40}{60} \cdot \frac{39}{59} \cdot \frac{38}{58} = \frac{59\,280}{205\,320} \approx 0,2887$$

Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die drei ausgewählten Fahrgäste aus Deutschland kommen, beträgt ungefähr 28,87 %.

- c) Bezeichnet man die Anzahl der an der Fahrt teilnehmenden Kinder mit k , so ist die Anzahl der Kinder, die ein Eis essen, $\frac{3}{4}k$, die Anzahl der Erwachsenen, die ein Eis essen, $\frac{1}{3}(60 - k)$. Insgesamt essen $\frac{60}{2} = 30$ der Fahrgäste ein Eis.

Damit gilt:

$$\frac{3}{4}k + \frac{1}{3}(60 - k) = 30$$

$$\frac{3}{4}k + 20 - \frac{1}{3}k = 30$$

$$\frac{5}{12}k = 10$$

$$k = 24$$

An der Fahrt nehmen 24 Kinder teil.

- d) Bei der Annahme handelt es sich deshalb um eine Vereinfachung, da das Erscheinen bzw. Nichterscheinen in der Regel für einige Personen mit Reservierung (z. B. befreundete Personen, Familien) nicht unabhängig voneinander erfolgt. Wenn z. B. in einer Familie die Eltern die Reservierung nicht wahrnehmen, werden auch die Kinder nicht mitfahren.
- e) Mindestens eine Person mit Reservierung muss abgewiesen werden, wenn entweder keine der Personen mit Reservierung oder nur eine Person mit Reservierung der Fahrt fernbleibt. Die Zufallsgröße X : „Anzahl der Personen mit Reservierung, die nicht zur Fahrt erscheinen“ ist binomialverteilt mit $n = 62$ und $p = 0,1$.



© **STARK Verlag**

www.stark-verlag.de
info@stark-verlag.de

Der Datenbestand der STARK Verlag GmbH
ist urheberrechtlich international geschützt.
Kein Teil dieser Daten darf ohne Zustimmung
des Rechteinhabers in irgendeiner Form
verwertet werden.

STARK