GYMNASIUM

TRAINING
MATHEMATIK

Grundwissen

Algebra · Geometrie · Stochastik
8. Klasse

STARK

Inhalt

Autor: Markus Fiederer

2 Funktionale Abhängigkeit

Aktien werden an Wertpapierbörsen gehandelt. Um die Lage am Markt festzustellen, werden die wichtigsten Aktienkurse zum DAX-Wert zusammengerechnet. Mithilfe der „Kurve“ kann man für jede Uhrzeit des Handelstages den DAX-Wert feststellen, d. h., jeder Uhrzeit wird genau ein DAX-Wert zugeordnet. Es herrscht ein funktionaler Zusammenhang.

> Unter einer **funktionalen Abhängigkeit** versteht man eine **mathematische Beschreibung**, wie man ausgehend von einer gegebenen Größe A die gesuchte Größe B eindeutig bestimmt.
>
> $A \xrightarrow{FA} B$ (FA: Funktionale Abhängigkeit)

Beispiele

1. 6 Kugeln Eis kosten 3,60 €.
   Was ist der funktionale Zusammenhang?

   Lösung:

   1 Kugel kostet 3,60 € : 6 = 0,60 €.
   Der funktionale Zusammenhang heißt also:

   Gesucht ist der funktionale Zusammenhang zwischen der Kugelanzahl A und dem Kaufpreis B. Dazu berechnest du den Preis einer Kugel Eis. Mit diesem Faktor musst du die Kugelanzahl multiplizieren, um ihren Preis zu erhalten.

   $$\underset{\substack{\uparrow\\ \textbf{Größe A: Anzahl der Eiskugeln}}}{x} \cdot 0{,}60\,€ = \underset{\substack{\uparrow\\ \textbf{Größe B: Kaufpreis in Euro}}}{y}$$

   Du kannst dir den funktionalen Zusammenhang als einfachen Computer vorstellen, der mit deiner Eingabe folgende Berechnung durchführt und den Preis berechnet:

   Eingabe: Anzahl der Kugeln $\xrightarrow{\text{15 Kugeln}}$ $\boxed{\text{Funktionaler Zusammenhang: } 15 \cdot 0{,}60\,€}$ $\xrightarrow{9\,€}$ Ausgabe: zu zahlender Betrag

2. Ein Swimming-Pool mit einem Volumen von 750 m^3 wird mit 5 Wasserrohren in 3 Stunden gefüllt.
Finde den funktionalen Zusammenhang zwischen der Anzahl der Zuleitungsrohre und der Füllzeit des Swimming-Pools.

Lösung:

1 Zuleitungsrohr benötigt $5 \cdot 3\text{ h} = 15\text{ h}$
2 Zuleitungsrohre benötigen $15\text{ h} : 2 = 7{,}5\text{ h}$
3 Zuleitungsrohre benötigen $15\text{ h} : 3 = 5\text{ h}$
⋮
x Zuleitungsrohre benötigen $15\text{ h} : x = 15\text{ h} \cdot \frac{1}{x}$

Man erhält den funktionalen Zusammenhang:

$$15\text{ h} \cdot \frac{1}{x} = y$$

↑ **Größe A: Anzahl der Rohre** (unter $\frac{1}{x}$)
↑ **Größe B: Fülldauer des Swimming-Pools** (unter y)

Eingabe: Anzahl der Rohre $\xrightarrow{\text{9 Rohre}}$ $\boxed{\text{Funktionaler Zusammenhang: } 15\text{ h} \cdot \frac{1}{9}}$ $\xrightarrow{1{,}\overline{6}\text{ h} = 1\frac{2}{3}\text{ h}}$ Ausgabe: Fülldauer des Swimming-Pools

3. Jede Bakterie teilt sich innerhalb eines Zyklus einmal.
Entwickle den funktionalen Zusammenhang zwischen der Anzahl der Zyklen und der Anzahl der Bakterien.

Lösung:

Man beginnt mit einer Bakterie:

nach einem Zyklus gibt es	2 Bakterien	2^1	
			$\cdot 2$
nach zwei Zyklen gibt es	4 Bakterien	2^2	
			$\cdot 2$
nach drei Zyklen gibt es	8 Bakterien	2^3	
			$\cdot 2$
nach vier Zyklen gibt es	16 Bakterien	2^4	
⋮	⋮	⋮	
nach x Zyklen gibt es	2^x Bakterien		

1 Kennzeichen einer gebrochen-rationalen Funktion

Lena besorgt für ihre Geburtstagsfeier eine Packung Gummibärchen. Wie viele Gummibärchen erhält jeder Gast, wenn sie insgesamt 10 Leute einlädt? Wie verändert sich die Stückzahl, wenn sie 15 Gäste erwartet?

Hierbei handelt es sich um indirekte Proportionalität (siehe S. 19). Jeder dazugehörige Graph stellt eine Hyperbel dar, die zu den gebrochen-rationalen Funktionen gehört. Wegen der Produktgleichheit der indirekten Proportionalität gilt:

$$x \cdot y = a \qquad |:x$$
$$y = \frac{a}{x}$$

Alle solche Funktionen lassen sich daher durch einen Funktionsterm der Art

$$x \mapsto y = \frac{a}{x} \quad \text{mit} \quad a \in \mathbb{Q}$$

beschreiben mit der maximalen Definitionsmenge $\mathbb{D}_{max} = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$.

Funktionsterme wie $x \mapsto \frac{2}{x}$, $x \mapsto \frac{1}{x-5}$, $x \mapsto \frac{x}{x^2+1}$ oder $x \mapsto \frac{2+x}{(2-x)^2}$ gehören zur Gruppe der gebrochen-rationalen Funktionen.

Funktionsterme, deren Nenner eine Variable enthält, nennt man **gebrochen-rationale Funktionen**.

Beispiel

Zeichne den Graphen der Funktion f mit der Gleichung $f(x) = \frac{2}{x+1}$ und dem Definitionsbereich $\mathbb{D}_f = [-5;\ 5] \setminus \{-1\}$.

Lösung:

$$f(x) = \frac{2}{x+1}$$

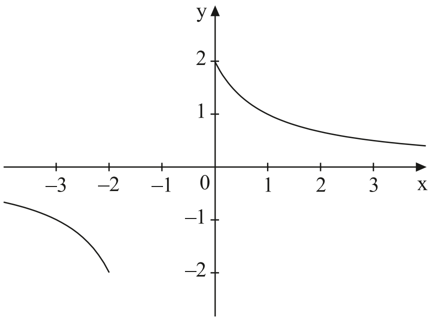
$$f(-3) = \frac{2}{-3+1} = \frac{2}{-2} = -1$$

Berechne die Funktion in Tabellenform. Setze dafür x-Werte aus der Definitionsmenge in die Funktion ein.

$x = -1$ darf nicht Element des Definitionsbereichs sein, da sonst der Nenner den Wert 0 annehmen würde.

x	–5	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4	5
f(x)	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{2}{3}$	–1	–2	–	2	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{3}$

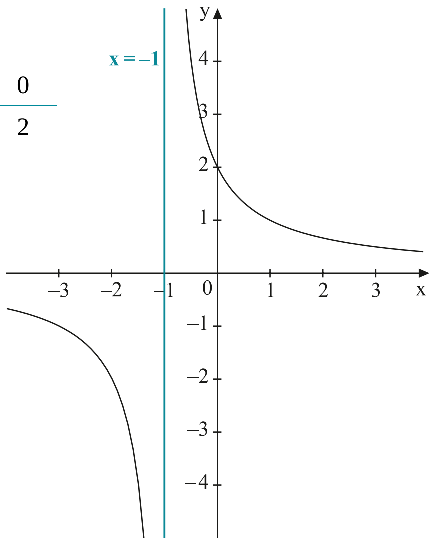
Eine erste Skizze des Graphen zeigt die Ungenauigkeit des Graphen in der Nähe der Stelle $x = -1$.



Eine Verfeinerung der Tabelle in der Umgebung von $x = -1$ ergibt:

x	–2	–1,5	–1,1	–0,9	–0,5	0
f(x)	–2	–4	–20	20	4	2

Nun kann auch die Umgebung von $x = -1$ genauer gezeichnet werden.



Aufgaben

74. Gegeben sind die Funktionen mit der Gleichung $y = \frac{a}{x}$ $(a \in \mathbb{Q})$ und der Definitionsmenge $\mathbb{D} = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$.

a) Zeichne jeweils für $a \in \{-2; -1; 0; 1; 2\}$ und $x \in [-3; 3] \setminus \{0\}$ die Graphen der Funktionen.

b) Wie nennt man diese Art Graphen?

c) Nenne Unterschiede des Graphen für $a = 0$ zu den restlichen Graphen.

75. Zeichne für die angegebenen Funktionsgleichungen und zugehörigen Definitionsbereiche die Graphen.

a) $f(x) = \frac{1}{x+2}$; $\mathbb{D}_f = [-5; 5] \setminus \{-2\}$

b) $f(x) = \frac{3}{1-x} + 1$; $\mathbb{D}_f = [-5; 5] \setminus \{1\}$

c) $f(x) = \frac{1}{x^2-1}$; $\mathbb{D}_f = [-5; 5] \setminus \{-1; 1\}$

d) $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$; $\mathbb{D}_f = [-5; 5]$