

TRAINING

MATHEMATIK

**MEHR
ERFAHREN**



Grundwissen

**Algebra · Geometrie · Stochastik
8. Klasse**

STARK

Inhalt

Vorwort

So arbeitest du mit diesem Buch

Methoden	1
Funktionale Zusammenhänge	7
1 Der Kreis	8
2 Funktionale Abhängigkeit	11
3 Direkte Proportionalität	14
4 Indirekte Proportionalität	19
Funktionen	25
1 Was ist eine Funktion?	26
2 Die Definitionsmenge	30
3 Graphen, Zeichnen von Graphen	32
Lineare Funktionen	37
1 Beispiele linearer Funktionen	38
2 Bestimmung von Nullstellen	44
3 Zwei Geraden schneiden sich	48
4 Intervalle	52
5 Lineare Ungleichungen	55
Lineare Gleichungssysteme	59
1 Eine Gleichung mit zwei Unbekannten	60
2 Grafische Lösung linearer Gleichungssysteme	62
3 Rechnerische Lösung linearer Gleichungssysteme	65
3.1 Das Einsetzungsverfahren	65
3.2 Das Additionsverfahren	67
4 Anwendungsaufgaben	70
Elementare gebrochen-rationale Funktionen	75
1 Kennzeichen einer gebrochen-rationale Funktion	76
2 Asymptoten und Polstellen	78
3 Schnittpunkte zweier Funktionen	82
4 Potenzen mit ganzzahligen Exponenten	86

Strahlensatz und Ähnlichkeit	91
1 Die zentrische Streckung	92
2 Strahlensatz	97
3 Ähnlichkeit von Figuren	102
4 Ähnlichkeitssätze für Dreiecke	105
Wahrscheinlichkeitsrechnung nach Laplace	109
1 Ergebnis und Ereignis eines Zufallsexperiments	110
2 Relative Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit	113
3 Laplace-Experiment	117
4 Das Zählprinzip	120
Grundwissen der 5. bis 8. Klasse	123
Lösungen	145

Autor: Markus Fiederer

2 Funktionale Abhängigkeit

Aktien werden an Wertpapierbörsen gehandelt. Um die Lage am Markt festzustellen, werden die wichtigsten Aktienkurse zum DAX-Wert zusammengerechnet. Mithilfe der „Kurve“ kann man für jede Uhrzeit des Handelstages den DAX-Wert feststellen, d. h., jeder Uhrzeit wird genau ein DAX-Wert zugeordnet. Es herrscht ein funktionaler Zusammenhang.



Unter einer **funktionalen Abhängigkeit** versteht man eine **mathematische Beschreibung**, wie man ausgehend von einer gegebenen Größe A die gesuchte Größe B eindeutig bestimmt.

$$A \xrightarrow{\text{FA}} B$$

(FA: Funktionale Abhängigkeit)

Beispiele

- 6 Kugeln Eis kosten 3,60 €. Was ist der funktionale Zusammenhang?

Lösung:

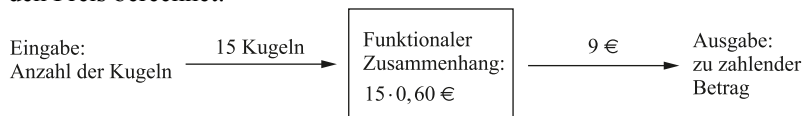
1 Kugel kostet $3,60 \text{ €} : 6 = 0,60 \text{ €}$.

Der funktionale Zusammenhang heißt also:

Gesucht ist der funktionale Zusammenhang zwischen der Kugelanzahl A und dem Kaufpreis B. Dazu berechnest du den Preis einer Kugel Eis. Mit diesem Faktor musst du die Kugelanzahl multiplizieren, um ihren Preis zu erhalten.

$$\begin{array}{ccc}
 x & \cdot 0,60 \text{ €} = & y \\
 \uparrow & & \uparrow \\
 \text{Größe A: Anzahl} & & \text{Größe B: Kaufpreis} \\
 \text{der Eiskugeln} & & \text{in Euro}
 \end{array}$$

Du kannst dir den funktionalen Zusammenhang als einfachen Computer vorstellen, der mit deiner Eingabe folgende Berechnung durchführt und den Preis berechnet:



2. Ein Swimming-Pool mit einem Volumen von 750 m^3 wird mit 5 Wasserrohren in 3 Stunden gefüllt.
 Finde den funktionalen Zusammenhang zwischen der Anzahl der Zuleitungsrohre und der Füllzeit des Swimming-Pools.



Lösung:

1 Zuleitungsrohr benötigt $5 \cdot 3 \text{ h} = 15 \text{ h}$

2 Zuleitungsrohre benötigen $15 \text{ h} : 2 = 7,5 \text{ h}$

3 Zuleitungsrohre benötigen $15 \text{ h} : 3 = 5 \text{ h}$

⋮

x Zuleitungsrohre benötigen $15 \text{ h} : x = 15 \text{ h} \cdot \frac{1}{x}$

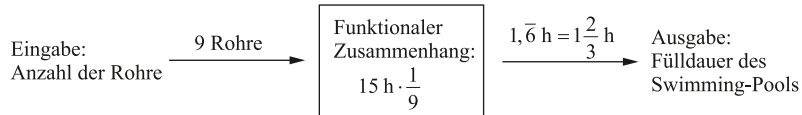
Man erhält den funktionalen Zusammenhang:

$$15 \text{ h} \cdot \frac{1}{x} = y$$

↑
↑

Größe A:
Größe B:

Anzahl der Rohre
Fülldauer des Swimming-Pools



3. Jede Bakterie teilt sich innerhalb eines Zyklus einmal.
 Entwickle den funktionalen Zusammenhang zwischen der Anzahl der Zyklen und der Anzahl der Bakterien.

Lösung:

Man beginnt mit einer Bakterie:

nach einem Zyklus gibt es 2 Bakterien 2^1) $\cdot 2$
 nach zwei Zyklen gibt es 4 Bakterien 2^2) $\cdot 2$
 nach drei Zyklen gibt es 8 Bakterien 2^3) $\cdot 2$
 nach vier Zyklen gibt es 16 Bakterien 2^4) $\cdot 2$

⋮

⋮

⋮

nach x Zyklen gibt es 2^x Bakterien

1 Kennzeichen einer gebrochen-rationale Funktion

Lena besorgt für ihre Geburtstagsfeier eine Packung Gummibärchen. Wie viele Gummibärchen erhält jeder Gast, wenn sie insgesamt 10 Leute einlädt? Wie verändert sich die Stückzahl, wenn sie 15 Gäste erwartet?



Hierbei handelt es sich um indirekte Proportionalität (siehe S. 19). Jeder dazugehörige Graph stellt eine Hyperbel dar, die zu den gebrochen-rationale Funktionen gehört. Wegen der Produktgleichheit der indirekten Proportionalität gilt:

$$x \cdot y = a \quad | : x$$

$$y = \frac{a}{x}$$

Alle solche Funktionen lassen sich daher durch einen Funktionsterm der Art

$$x \mapsto y = \frac{a}{x} \quad \text{mit } a \in \mathbb{Q}$$

beschreiben mit der maximalen Definitionsmenge

$$\mathbb{D}_{\max} = \mathbb{Q} \setminus \{0\}.$$

Funktionsterme wie $x \mapsto \frac{2}{x}$, $x \mapsto \frac{1}{x-5}$, $x \mapsto \frac{x}{x^2+1}$ oder $x \mapsto \frac{2+x}{(2-x)^2}$ gehören zur Gruppe der gebrochen-rationale Funktionen.

Funktionsterme, deren Nenner eine Variable enthält, nennt man **gebrochen-rationale Funktionen**.

Beispiel

Zeichne den Graphen der Funktion f mit der Gleichung

$$f(x) = \frac{2}{x+1} \quad \text{und dem Definitionsbereich } \mathbb{D}_f = [-5; 5] \setminus \{-1\}.$$

Lösung:

$$f(x) = \frac{2}{x+1}$$

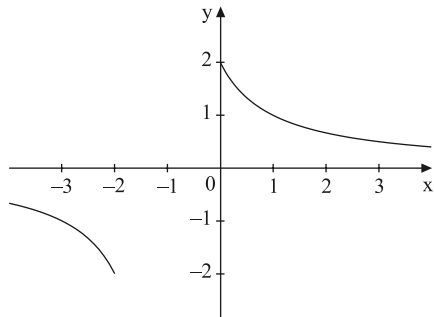
$$f(-3) = \frac{2}{-3+1} = \frac{2}{-2} = -1$$

Berechne die Funktion in Tabellenform. Setze dafür x -Werte aus der Definitionsmenge in die Funktion ein.

$x = -1$ darf nicht Element des Definitionsbereichs sein, da sonst der Nenner den Wert 0 annehmen würde.

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$f(x)$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{2}{3}$	-1	-2	-	2	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{3}$

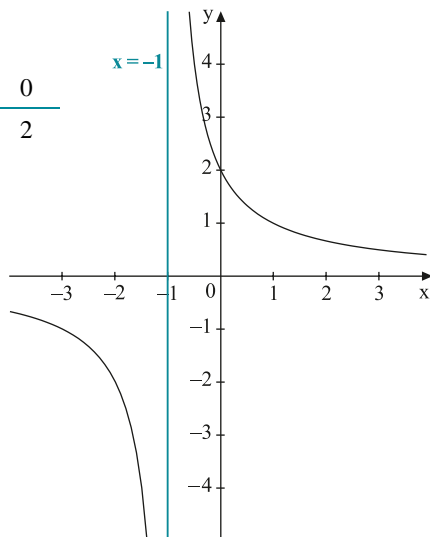
Eine erste Skizze des Graphen zeigt die Ungenauigkeit des Graphen in der Nähe der Stelle $x = -1$.



Eine Verfeinerung der Tabelle in der Umgebung von $x = -1$ ergibt:

x	-2	-1,5	-1,1	-0,9	-0,5	0
$f(x)$	-2	-4	-20	20	4	2

Nun kann auch die Umgebung von $x = -1$ genauer gezeichnet werden.



- Aufgaben** 74. Gegeben sind die Funktionen mit der Gleichung $y = \frac{a}{x}$ ($a \in \mathbb{Q}$) und der Definitionsmenge $D = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$.
- Zeichne jeweils für $a \in \{-2; -1; 0; 1; 2\}$ und $x \in [-3; 3] \setminus \{0\}$ die Graphen der Funktionen.
 - Wie nennt man diese Art Graphen?
 - Nenne Unterschiede des Graphen für $a=0$ zu den restlichen Graphen.
75. Zeichne für die angegebenen Funktionsgleichungen und zugehörigen Definitionsbereiche die Graphen.
- $f(x) = \frac{1}{x+2}$; $D_f = [-5; 5] \setminus \{-2\}$
 - $f(x) = \frac{3}{1-x} + 1$; $D_f = [-5; 5] \setminus \{1\}$
 - $f(x) = \frac{1}{x^2-1}$; $D_f = [-5; 5] \setminus \{-1; 1\}$
 - $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$; $D_f = [-5; 5]$



© **STARK Verlag**

www.stark-verlag.de

info@stark-verlag.de

Der Datenbestand der STARK Verlag GmbH ist urheberrechtlich international geschützt. Kein Teil dieser Daten darf ohne Zustimmung des Rechteinhabers in irgendeiner Form verwertet werden.

STARK